

Formules de trigonométrie circulaire

Soient $a, b, p, q, x, y \in \mathbb{R}$ (tels que les fonctions soient **bien définies**) et $n \in \mathbb{N}$.

La parfaite connaissance des graphes des fonctions trigonométriques est nécessaire.

Relations fondamentales

$$\begin{aligned} \cos^2(x) + \sin^2(x) &= 1 & -\frac{d}{dx} \cotan(x) &= 1 + \cotan^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} & \frac{d}{dx} \tan(x) &= 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \\ \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) &= \frac{\pi}{2} & \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) &= \operatorname{signe}(x) \times \frac{\pi}{2} & \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arccotan}(x) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos}(x)$$

x en radians	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\pm\infty$

Il faut savoir linéariser à l'aide des formules d'EULER $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$; de même, développer se réalise à partir des formules de MOIVRE $e^{inx} = (\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$.

Formules d'addition

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} & \tan(a-b) &= \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} \end{aligned}$$

Pour retenir $\cos(x \pm n\frac{\pi}{2})$ et $\sin(x \pm n\frac{\pi}{2})$, il suffit de visualiser les axes du cercle trigonométrique : $+$ cos, $+$ sin, $-$ cos et $-$ sin (dans le sens trigonométrique). Ajouter $\frac{\pi}{2}$ correspond à avancer dans le sens antitrigonométrique (ou à **dériver**); retrancher $\frac{\pi}{2}$ correspond à avancer dans le sens trigonométrique (ou à **intégrer**). Par exemple : $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.

Formules d'angle double

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) & \sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x) \\ &= 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x) & \tan(2x) &= \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)} \end{aligned}$$

Formules du demi-angle

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \tan(x) = \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)} = \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$$

En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour $x \neq \pi [2\pi]$, on a : $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$.

Somme, différence et produit

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) & \cos(p) - \cos(q) &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) & \sin(p) - \sin(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \tan(p) + \tan(q) &= \frac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)} & \tan(p) - \tan(q) &= \frac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)} \end{aligned}$$

Procédé mnémotechnique : retenir « coco-moins-sisi-sico-cosi » pour l'ordre des fonctions.

Les produits $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a)\cos(b)$ s'obtiennent à partir des formules d'addition.